Grado en Física – Análisis Matemático I

Relación de ejercicios 4 - Soluciones

Ejercicio 1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, pongamos $M = \max f([a, b])$, $m = \min f([a, b])$ y supongamos que $f(a) = f(b)$ y que $m < f(a) < M$. Prueba que f toma todo valor de $]m, M[$ en al menos dos puntos de $[a, b]$.

Solución. Una gráfica indica enseguida lo que hay que hacer (pero sobre una gráfica no se puede razonar). Sean $u, v \in [a, b]$ tales que $f(u) = m$ y $f(v) = M$. Observa que como $m < f(a) = f(b) < M$ debe ser $u \neq v$ y ambos deben ser distintos de a y de b. Supongamos que $u < v$.

Consideremos los tres intervalos $[a, u]$, $[u, v]$ y $[v, b]$. Por el teorema del valor intermedio, sabemos que la imagen de un intervalo por una función continua es un intervalo o, dicho de otra manera, si una función continua en un intervalo toma dos valores también toma en dicho intervalo todos los valores comprendidos entre ellos dos. Como $f(a), f(u) \in f([a, u])$ se sigue que $f([a, u]) \supset [f(u), f(a)] = [m, f(a)]$. Análogamente, como $f(b), f(v) \in f([v, b])$ se sigue que $f([v, b]) \supset [f(b), f(v)] = [f(a), M]$. Y, claro está, $f([u, v]) = [m, M]$. Pongamos $A = [a, u[\cup]v, b]$. Tenemos que

$$f(A) = f([a, u[) \cup f(]v, b]) \supset]m, f(a)] \cup [f(a), M[=]m, M[.$$

Como $A \cap [u, v] = \emptyset$, se sigue que cada valor en $]m, M[$ es tomado por f en al menos dos puntos: uno en A y otro en $]u, v[$. ☺

Ejercicio 2. Determina el número de ceros de la función: $f(x) = e^x + x^3 - 6x - 2$.

Solución. Sabemos, como consecuencia del teorema de Rolle, que si la derivada de una función se anula en exactamente k puntos distintos, entonces la función puede anularse ***como máximo*** en $k + 1$ puntos distintos. Las derivadas de nuestra función vienen dadas por:

$$f'(x) = e^x + 3x^2 - 6, \quad f''(x) = e^x + 6x, \quad f'''(x) = e^x + 6.$$

Llegados aquí, *es evidente* que no hay que seguir, porque $f'''(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Deducimos que f'' se anula *como mucho* en un punto, f' se anula *como mucho* en dos puntos y f se anula *como mucho* en tres puntos.

Lo anterior no prueba que f se anule, sino solamente que *no puede anularse en más de tres puntos*. Para estudiar si realmente f se anula debemos usar el teorema de Bolzano y obtener puntos en los que la función cambie de signo. Tenemos que:

$$f(-3) = e^{-3} - 11 < 0, \;\; f(-1) = \frac{1}{e} + 3 > 0, \;\; f(0) = -1, \;\; f(3) = e^3 + 7 > 0.$$

Deducimos, por el teorema de Bolzano, que en cada uno de los intervalos $]-3, -1[$, $]0, -1, 0[$ y $]0, 3[$ la función f se anula en *por lo menos* un punto. Por tanto, f se anula en *por lo menos* tres puntos. Como también hemos probado que f no puede anularse en más de tres puntos, concluimos que f se anula en exactamente tres puntos. ☺

Ejercicio 3. Estudia el número de soluciones de la ecuación:

$$\cos x - \operatorname{sen} x + \frac{x^3}{2} - \frac{2}{3} = 0.$$

Solución. Pongamos $f(x) = \cos x - \operatorname{sen} x + \frac{x^3}{2} - \frac{2}{3}$, función que, naturalmente, está definida en toda la recta real. Dicha función tiene derivadas de todos órdenes y, muy en particular, es continua. Además está definida en un intervalo: $\mathbb{R}$.

Sabemos, como consecuencia del teorema de Rolle, que si la derivada de una función se anula en exactamente k puntos distintos, entonces la función puede anularse ***como máximo*** en $k+1$ puntos distintos. Las derivadas de nuestra función vienen dadas por:

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x - \cos x + \frac{3}{2}x^2, \quad f''(x) = -\cos x + \operatorname{sen} x + 3x, \quad f'''(x) = \operatorname{sen} x + \cos x + 3.$$

Llegados aquí, *es evidente* que no hay que seguir, porque es sabido que $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$ y $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, por lo que, *evidentemente*, $f'''(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Deducimos que f'' se anula *como mucho* en un punto, f' se anula *como mucho* en dos puntos y f se anula *como mucho* en tres puntos.

Lo anterior no prueba que f se anule, sino solamente que *no puede anularse en más de tres puntos*. Para estudiar si realmente f se anula debemos usar el teorema de Bolzano y obtener puntos en los que la función cambie de signo. Tenemos que:

$$f(-\pi) = -1 - \frac{\pi^3}{2} - \frac{2}{3} < 0,\ f(0) = 1 - \frac{2}{3} > 0,\ f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi^3}{128} - \frac{2}{3} < \frac{4^3}{128} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6} < 0,\ f(2\pi) = 1 + 4\pi^3 - \frac{2}{3} > 0.$$

Deducimos, por el teorema de Bolzano, que en cada uno de los intervalos $]-\pi, 0[,]0, \pi/4[,]\pi/4, 2\pi[$ la función f se anula en *por lo menos* un punto. Por tanto, f se anula en *por lo menos* tres puntos. Como también hemos probado que f no puede anularse en más de tres puntos, concluimos que f se anula en exactamente tres puntos.[1] ☺

Ejercicio 4. Determina el número de soluciones reales de la ecuación $2x^3 - 3x^2 - 12x = m$ según el valor del número real m.

Solución. Pongamos $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$. Se trata de ver cuántas veces la función f toma el valor $m \in \mathbb{R}$. Como f es una función polinómica de tercer grado, sabemos que la ecuación $f(x) = m$ tiene al menos una raíz real simple. Puede ocurrir que tenga tres raíces reales simples, una raíz real doble y una simple y solamente una raíz real (y dos imaginarias conjugadas). Tenemos que

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x+1)(x-2)$$

$$x < -1 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \upuparrows \text{ en }]-\infty, -1] \Rightarrow f(]-\infty, -1]) =]\lim_{x\to-\infty} f(x), f(-1)] =]-\infty, 7]$$

$$-1 < x < 2 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \downdownarrows \text{ en } [-1, 2] \Rightarrow f([-1, 2]) = [f(2), f(-1)] = [-20, 7]$$

$$2 < x \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \upuparrows \text{ en } [2, +\infty[\Rightarrow f([2, +\infty[) = [f(2), \lim_{x\to+\infty} f(x)[= [-20, +\infty[$$

Donde en cada caso hemos tenido en cuenta la monotonía de la función y que, por el teorema del valor intermedio, la imagen de un intervalo por una función continua es un intervalo. A la vista de estos resultados deducimos lo que sigue.

Si $m < -20$, la ecuación $f(x) = m$ tiene una única solución simple que está en el intervalo $]-\infty, -1[$.

La ecuación $f(x) = -20$, esto es, $f(x) + 20 = 0$ tiene una solución en $x = 2$ que es doble porque también anula a f', y tiene otra solución simple en el intervalo $]-\infty, -1[$.

[1] Por el teorema de Rolle y lo antes visto, deducimos también que f' se anula en exactamente dos puntos y f'' se anula en un sólo punto.

Si $-20 < m < 7$, la ecuación $f(x) = m$ tiene tres soluciones reales simples, una en cada intervalo $]-\infty, -1[$, $]-1, 2[$ y $]2, +\infty[$.

La ecuación $f(x) = 7$, esto es, $f(x) - 7 = 0$, tiene una solución en $x = -1$ que es doble porque también anula a f', y tiene otra solución simple en el intervalo $]2, +\infty[$.

Si $m > 7$ la ecuación $f(x) = m$ tiene una única solución simple que está en el intervalo $]2, +\infty[$.

También podemos hacer este ejercicio como sigue. Recuerda que los ceros de la derivada separan los ceros de la función, es decir, en los intervalos $]-\infty, -1[$, $]-1, 2[$ y $]2, +\infty[$ la función f solamente puede anularse como mucho una vez. Teniendo en cuenta el teorema de Bolzano y que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

deducimos lo que sigue:

Para que $f(x) - m = 0$ tenga tres raíces simples es *necesario y suficiente* que se verifiquen las dos desigualdades $f(-1) - m > 0$ y $f(2) - m < 0$, es decir, $m < 7$ y $m > -20$, o sea, $-20 < m < 7$.

Como los ceros de la derivada son -1 y 2, se sigue que $f(x) - m = 0$ tendrá una raíz real doble (y necesariamente otra simple) si $f(-1) - m = 0$ o $f(2) - m = 0$, esto es, $m = 7$ o $m = -20$.

De lo anterior deducimos que $f(x) - m = 0$ tiene una única raíz simple si se cumple alguna de las desigualdades $f(-1) - m < 0$ o $f(2) - m > 0$, es decir $m > 7$ o $m < -20$. ☺

Ejercicio 5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x) = \frac{2x^2 + 6x + 10}{x^2 + 1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Estudia el número de soluciones reales de la ecuación $f(x) = m$ según el valor del número real m.

Solución. Estudiaremos los intervalos en los que la derivada es positiva o negativa pues en ellos la función es estrictamente monótona por lo que es fácil calcular los valores que f toma en dichos intervalos. Un sencillo cálculo da:

$$f'(x) = -2\frac{3x^2 + 8x - 3}{(x^2 + 1)^2}$$

Los ceros de la derivada son las raíces de la ecuación $3x^2 + 8x - 3 = 0$ que se calculan como de costumbre y son -3 y $1/3$. El signo de dicha derivada es el mismo del trinomio $-3x^2 - 8x + 3 = -3(x + 3)(x - 1/3)$. Tenemos que:

$$x < -3 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \downdownarrows \text{ en }]-\infty, -3] \Rightarrow f(]-\infty, -3]) = [f(-3), \lim_{x\to-\infty} f(x)[=[1, 2[$$

$$-3 < x < 1/3 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \upuparrows \text{ en } [-3, 1/3] \Rightarrow f([-3, 1/3]) = [f(-3), f(1/3)] = [1, 11]$$

$$1/3 < x \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \downdownarrows \text{ en } [1/3, +\infty[\Rightarrow f([1/3, +\infty[) =]\lim_{x\to+\infty} f(x), f(1/3)] =]2, 11]$$

Donde en cada caso hemos tenido en cuenta la monotonía de la función y que, por el teorema del valor intermedio, la imagen de un intervalo por una función continua es un intervalo. A la vista de estos resultados deducimos lo que sigue.

Los valores $m = 1$ o $m = 11$ los toma f una sola vez en los puntos -3 y $1/3$ respectivamente. Es decir, para dichos valores de m la ecuación $f(x) = m$ tiene una solución.

Para $1 < m < 2$ la función toma dicho valor una vez en $]-\infty, -3[$ y otra vez en $]-3, 1/3[$. Es decir, para dichos valores de m la ecuación $f(x) = m$ tiene dos soluciones.

Para $2 < m < 11$ la función toma dicho valor una vez en $]-3, 1/3[$ y otra vez en $]1/3, +\infty[$. Es decir, para dichos valores de m la ecuación $f(x) = m$ tiene dos soluciones.

El valor $m = 2$ lo toma la función una sola vez en el intervalo $]-3, 1/3[$.

Para $m < 1$ y para $m > 11$ la ecuación $f(x) = m$ no tiene solución.

Como la función es muy sencilla, también puede procederse en este ejercicio de una forma más directa resolviendo la ecuación $f(x) = m$. Tenemos que:

$$\frac{2x^2 + 6x + 10}{x^2 + 1} = m \Longleftrightarrow (2-m)x^2 + 6x + 10 - m = 0$$

Para $m = 2$ esta ecuación tiene una solución única que es $x = -4/3$. Para $m \neq 2$ esta ecuación tendrá soluciones reales siempre que el discriminante sea mayor o igual que 0. Es decir se verifique que $36 - 4(10-m)(2-m) \geqslant 0$. Tenemos que:

$$36 - 4(10-m)(2-m) = 44 + 48m - 4m^2 = -4(m^2 - 12m + 11) = -4(m-1)(m-11)$$

Deducimos que $36-4(10-m)(2-m) \geqslant 0 \Longleftrightarrow 1 \leqslant m \leqslant 11$. De esta forma hemos obtenido fácilmente que la ecuación $f(x) = m$ tiene dos soluciones reales distintas para $1 < m < 2$ y $2 < m < 11$ pues para dichos valores de m el discriminante es positivo. Para $m = 1$ y para $m = 11$ el discriminante se anula y hay una única solución (doble). Para $m < 1$ y para $m > 11$ la ecuación $f(x) = m$ no tiene solución. Volvemos así a obtener los resultados anteriores. ☺